

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

### Ασκήσεις Επανάληψης

Ακαδημαϊκό Έτος 2015-2016

**Άσκηση 1:** Έστω η τυχαία μεταβλητή  $X$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1-x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \alpha > 0.$$

α) Να υπολογισθεί η σταθερά  $\alpha$  και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_X$  της  $X$ .

β) Να υπολογισθούν με τη χρήση της  $f_X(x)$  η πιθανότητα  $P(X > 0)$  και με τη χρήση της  $F_X$  η πιθανότητα  $P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)$ . Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα  $P\left(X > -\frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$  και να εξετασθεί αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα  $A = \{X > 0\}$  και  $B = \left\{-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\}$ . γ) Να υπολογισθεί η  $E(X)$ .

**Άσκηση 2:** α) Σε ένα Πανεπιστήμιο οι προπτυχιακοί φοιτητές είναι διπλάσιοι από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές. Επίσης, 25% από τους μεταπτυχιακούς φοιτητές μένουν στις φοιτητικές εστίες, ενώ 10% των προπτυχιακών φοιτητών μένουν στις φοιτητικές εστίες. i) Αν ένας από τους φοιτητές αυτούς επιλεγεί στην τύχη, ποια η πιθανότητα να είναι προπτυχιακός φοιτητής και να μένει σε φοιτητική εστία; ii) Αν ένας φοιτητής που μένει σε φοιτητική εστία επιλεγεί στην τύχη, ποια η πιθανότητα να είναι μεταπτυχιακός φοιτητής;

β) Ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές. Έστω το ενδεχόμενο  $A$  «το πολύ μια Κεφαλή στις δύο ρίψεις» και έστω  $B$  το ενδεχόμενο «μια Κεφαλή και μια γράμματα στις δύο ρίψεις». Είναι τα  $A$  και  $B$  ανεξάρτητα ενδεχόμενα;

**Άσκηση 3:** α) Δέκα βιβλία τοποθετούνται στο ίδιο ράφι μιας βιβλιοθήκης. Ποιά η πιθανότητα τρία συγκεκριμένα από αυτά να τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο;

β) Ένας μαθηματικός έδωσε στους μαθητές του 12 ασκήσεις και τους είπε ότι 6 από αυτές θα επιλεγούν στην τύχη και θα είναι θέματα στις εξετάσεις. Η Μαρία γνωρίζει τη λύση 8 από τις ασκήσεις αυτές και δεν μπορεί να λύσει τις υπόλοιπες 4. Ποιά η πιθανότητα να λύσει σωστά 4 ή περισσότερα θέματα στις εξετάσεις;

**Άσκηση 4:** α) Ένα νόμισμα ρίχνεται 10 φορές και στις 6 από αυτές εμφανίζεται Κεφαλή. Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός Γραμμάτων σε 5 ρίψεις του νομίσματος αυτού;

β) Φοιτητές επισκέπτονται το γραφείο ενός καθηγητή τους, την προηγούμενη των εξετάσεων, για ερωτήσεις και απορίες. Έστω ότι επισκέπτονται το γραφείο 6 φοιτητές την ώρα, κατά μέσο όρο. i) Ποια η πιθανότητα να επισκεφθούν το γραφείο 3 φοιτητές μεταξύ 10:00 και 10:45 το πρωί. ii) Δεδομένου ότι ένας φοιτητής μπαίνει στο γραφείο για ερωτήσεις, ποια η πιθανότητα ο αμέσως επόμενος να περιμένει μεταξύ 5 και 10 λεπτών;

**Άσκηση 5:** α) Το βάρος σε κιλά κιβωτίων στα οποία συσκευάζονται παιδικές τροφές μπορεί να μοντελοποιηθεί από την κανονική κατανομή  $N(5, 16)$ . Να υπολογιστούν οι πιθανότητες ένα κιβώτιο που επιλέγεται στην τύχη: i) Να ζυγίζει μεταξύ 1 και 10 κιλών, και ii) να ζυγίζει περισσότερο από 9 κιλά.

β) Αν εξεταστεί το βάρος τεσσάρων από τα κιβώτια αυτά, ποια η πιθανότητα και τα τέσσερα να έχουν βάρος μεγαλύτερο από εννιά κιλά;

γ) Αν  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και υπάρχει η  $E(X)$ , να δειχθεί ότι  $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$ , για σταθερές  $\alpha$  και  $\beta$ .